

GHE モデルを用いた
多次元解析における陰的な応力計算手法

構成式, ヒステリシス

五大開発株式会社
金沢大学 名誉教授

正会員 ○新保泰輝
正会員 矢富盟祥

1. はじめに

骨格曲線の多次元化手法は、直交座標系においてせん断応力にのみ骨格曲線を考慮する手法や吉田ら¹⁾の手法がある。前者は軸差ひずみによる繰り返し挙動が表現できないという問題点がある。後者は骨格曲線/履歴曲線に無次元化相当偏差ひずみ ξ 、無次元化相当偏差応力 η を用いて骨格曲線の接線剛性 $g := d\eta/d\xi$ に対し、ひずみ増分をかける事で得られる増分応力から応力を求めている。したがって、軸差ひずみによる繰り返し挙動が考慮された手法である。吉田らは手法はこの増分応力を用いて除荷・負荷条件を明確にしており、非常に有用な手法である。しかし、接線剛性を用いて陽に応力を求めているため、非線形性を有する骨格曲線を用いた場合、解析ステップに解が依存するなどの問題点を有する。そこで、本稿では接線剛性 g を用いる事なく、解析ステップに解が依存しない陰的な計算手法を提案し、その解析例を示す。また、提案手法では Newton-Raphson 法の接線に整合した剛性マトリクスを求める事が可能である事を示す。

2. 骨格曲線/履歴曲線

本稿の提案手法は一般の骨格曲線に対し成り立つが、具体的な骨格曲線として GHE モデル²⁾を用いた。GHE モデルの骨格曲線は、パラメータ $C_1(0)$, $C_1(\infty)$, $C_2(0)$, $C_2(\infty)$, α , β , せん断剛性 G_{\max} , せん断強度 τ_{\max} , 工学せん断ひずみ γ , せん断応力 τ を用いて次式で示される。GHE モデルに関する詳細は文献 2 を参照されたい。

$$\eta(\xi) = \frac{\xi}{\frac{1}{C_1(\xi)} + \frac{\xi}{C_2(\xi)}}, \quad \eta := \frac{\tau}{\tau_{\max}}, \quad \xi := \frac{\gamma G_{\max}}{\tau_{\max}}$$

$$C_1(x) := \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{x} + 1} \right\}, \quad C_2(x) := \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{x} + 1} \right\} \quad (1)$$

3. 陰的な応力計算手法

今、ある時間間隔 $[n, n+1]$ において、 $n+1$ のひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ が得られたとする。また、式(1)の多次元化として、 γ , τ をそれぞれ相当偏差ひずみ $e := \sqrt{2\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}}$ 、相当偏差応力 $\tau := \sqrt{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S})/2}$ と置き換える。ここで、偏差ひずみテンソル \mathbf{e} 、偏差応力テンソル \mathbf{S} である。これらを用いる事で軸差ひずみによる繰り返し挙動が考慮できるようになる¹⁾。この時、応力が骨格曲線上にある場合と履歴曲線上にある場合に分けて応力計算を行う。なお、除荷負荷判定に関しては、吉田らの手法¹⁾に対し、一度、後述 $n+1$ の応力値を試行応力として与える事で陰的に状態を確定している。紙面の都合上詳細は割愛する。

3.1 骨格曲線 除荷点がなく、応力が骨格曲線上に存在する場合、 η_{n+1} は $\eta_{n+1} = \eta(\xi_{n+1})$ を満足する。ここで偏差ひずみ \mathbf{e}_{n+1} と偏差応力 \mathbf{S}_{n+1} の方向が一致すると仮定すれば、即座に次式に示すように $n+1$ での偏差応力が得られる。

$$\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{e}_{n+1}}{\|\mathbf{e}_{n+1}\|}, \quad \mathbf{S}_{n+1} = \|\mathbf{S}_{n+1}\| \frac{\mathbf{e}_{n+1}}{\|\mathbf{e}_{n+1}\|} = 2G_{\max} \frac{\eta(\xi_{n+1})}{\xi_{n+1}} \mathbf{e}_{n+1} \quad \therefore \mathbf{S}_{n+1} = 2G_{\max} \frac{C_1(\xi_{n+1})C_2(\xi_{n+1})}{C_2(\xi_{n+1}) + \xi_{n+1}C_1(\xi_{n+1})} \mathbf{e}_{n+1} \quad (2)$$

上式 $\|\cdot\|$ はテンソルのノルムを意味する。上式に体積成分を足し合わせる事で時刻 $n+1$ の応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ が得られる。ここで、体積成分が線形等方弾性体であるとすれば、Consistent 剛性マトリクスは次式となる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G_{\max} \frac{C_1(\xi_{n+1})C_2(\xi_{n+1})}{C_2(\xi_{n+1}) + \xi_{n+1}C_1(\xi_{n+1})} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + 2G_{\max} \frac{D(\xi_{n+1})}{\xi_{n+1}} \boldsymbol{\xi}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\xi}_{n+1}$$

where, $D(\xi_{n+1}) := \frac{C_2^2(\xi)C_1'(\xi_{n+1}) + C_1^2(\xi_{n+1})(\xi_{n+1}C_2'(\xi_{n+1}) - C_2(\xi_{n+1}))}{\{C_2(\xi_{n+1}) + \xi_{n+1}C_1(\xi_{n+1})\}^2}, C_1'(\xi_{n+1}) = -\frac{\pi\alpha(C_1(0) - C_1(\infty))}{2(\xi_{n+1} + \alpha)^2} \sin\left(\frac{\pi\xi_{n+1}}{\xi_{n+1} + \alpha}\right),$ (3)

$$C_2'(\xi_{n+1}) = -\frac{\pi\beta(C_2(0) - C_2(\infty))}{2(\xi_{n+1} + \beta)^2} \sin\left(\frac{\pi\xi_{n+1}}{\xi_{n+1} + \beta}\right).$$

3.2 履歴曲線 既知の除荷点がある場合、応力が Masing 則に従って履歴曲線を満足すると仮定する。今、除荷点での相当ひずみを $\boldsymbol{\varepsilon}^{Ri}$ 、偏差応力を \mathbf{S}^{Ri} とし、除荷点から時刻 $n+1$ の偏差ひずみまでの距離 ξ_{n+1}^L と除荷点から時刻 $n+1$ の偏差応力の距離を次式のように表す。

An implicit stress calculation scheme for a multi-dimensional analysis which is used the constitutive equation with a one-dimensional skeleton curve

GODAI KAIHATSU corporation, Taiki SHIMBO
Kanazawa University, Chikayoshi YATOMI

$$\xi_{n+1}^L = \frac{G_{\max}}{\tau_{\max}} e_{n+1}^L, \quad \eta_{n+1}^L = \frac{\tau_{n+1}^L}{\tau_{\max}}, \quad e_{n+1}^L := \sqrt{2(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}^{Ri}) \cdot (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}^{Ri})}, \quad \tau_{n+1}^L := \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}^{Ri}) \cdot (\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}^{Ri})} \quad (4)$$

この時、 η_{n+1}^L は Masing 則より、 $\eta_{n+1}^L/2 = \eta(\xi_{n+1}^L/2)$ を満足する。ここで、 $n+1$ の偏差ひずみ \mathbf{e}_{n+1} と除荷点の偏差ひずみ \mathbf{e}^{Ri} の差で表される方向にのみ偏差応力が発生すると仮定すると、除荷点の偏差応力 \mathbf{S}^{Ri} が既知であることから、 \mathbf{S}_{n+1} ならびに Consistent 剛性マトリクスは次式のように偏差ひずみ \mathbf{e}_{n+1} の関数として得られる。

$$\frac{\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}^{Ri}}{\|\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{S}^{Ri}\|} = \frac{\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}^{Ri}}{\|\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}^{Ri}\|} \quad \therefore \mathbf{S}_{n+1} = 2G_{\max} \frac{C_1\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right)C_2\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right)}{C_2\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right) + \frac{\xi_{n+1}^L}{2}C_1\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right)} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}^{Ri}) + \mathbf{S}^{Ri} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = K\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G_{\max} \frac{C_1\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right)C_2\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right)}{C_2\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right) + \frac{\xi_{n+1}^L}{2}C_1\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right)} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) + 2G_{\max} D\left(\frac{\xi_{n+1}^L}{2}\right) \frac{1}{2\xi_{n+1}^L} \boldsymbol{\xi}_{n+1}^L \otimes \boldsymbol{\xi}_{n+1}^L \quad (6)$$

4. 解析例

本節では本提案手法の解析例を示す。図1に示すような1モデルの解析を行った。用いた解析時間、ひずみ振幅、ステップ数は図1に示す通りである。モデルに時刻歴のひずみを与えて式(2)、式(5)を用いた場合と骨格曲線/履歴曲線の接線剛性 $g := d\eta/d\xi$ を用いた場合の比較を行った。用いたパラメータは表1に示す通りである。図2に解析ステップを変化させた解析例を示す。図2に示すように、接線剛性を用いた手法では、ステップが比較的荒い場合には、理論曲線である骨格曲線/履歴曲線から大きくずれが生じているのが見て取れる。除荷負荷判定の影響により、応力が不連続に変化している箇所も見られる。一方、提案手法ではステップが荒い場合であっても理論曲線に一致しており、解析ステップによらず同じ値が得られているのが見て取れる。

表1 解析パラメータ一覧

初期せん断剛性 G_{\max}	[MPa]	150
ポアソン比	[-]	
粘着力 C	[kPa]	95
内部摩擦角	[°]	17
初期平均応力 p_0	[kPa]	20
GHEモデルパラメータ		
$C_1(0)$	[-]	1
$C_1(\infty)$	[-]	0.2
$C_2(0)$	[-]	0.15
$C_2(\infty)$	[-]	0.35
α	[-]	1.53
β	[-]	0.35

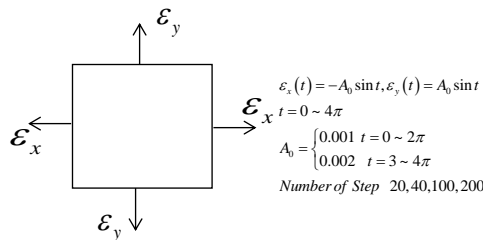


図1 解析モデルと諸条件

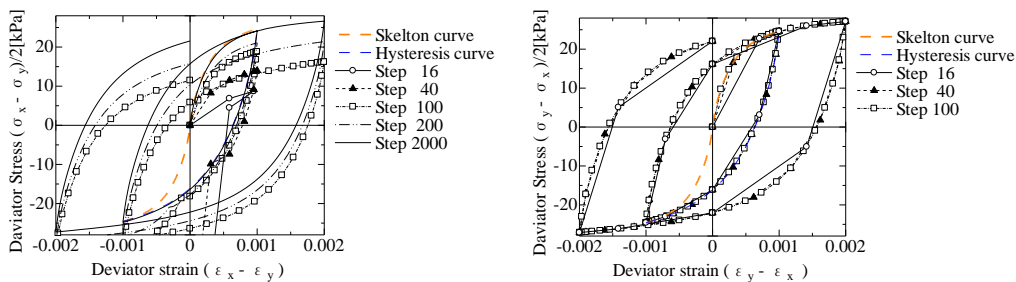


図2 解析結果 (左: 接線剛性 $g := d\eta/d\xi$, 右: 提案手法)

5. まとめ

本稿では一次元骨格曲線を有する構成式の陰的な応力計算手法を提案した。偏差応力が偏差ひずみテンソルと同方向に発生すると仮定する事で、応力がひずみの関数で表される事を示し、せん断ひずみのみならず軸差ひずみによるヒステリシスの表現が可能である事を示した。また、応力が $n+1$ でのひずみを用いて得られる事ため、非線形性の強い GHE モデルであっても解析ステップに依存する事なく応力が得られ、同時に Consistent 構成テンソルが求められる事を示した。

謝辞 株式会社 複合技術研究所 Duttine Antoine 氏には GHE モデルに関して助言を頂きました。ここに記して感謝致します。

参考文献 1) 吉田望, 辻野修一, 多次元解析に用いる簡易な構成則, 第 28 回土質工学研究発表会講演集, 2) Tatsuoka, F. and Shibuya, S. (1991), "Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests", Keynote Lecture for Session No.1, Proc. of the 9th Asian Regional Conf. on SMFE, Bangkok, Vol.II, pp.101-170.