

陰解法弾塑性計算土/水連成有限要素法を用いた土留め工の解析

Analysis of earth retaining by soil/water coupling FEM analysis
using implicit elasto-plastic calculation algorithm

鱸 洋一*・大熊俊明**・小西 満**・小島義孝***・矢富盟祥****

Yoichi SUZUKI, Toshiaki OHKUMA, Mitsuru KONISHI, Yoshitaka KOJIMA and Chikayoshi YATOMI

* 正会員 博(工) 五大開発株式会社 応用工学研究所 主任研究員 (〒921-8051 金沢市黒田1丁目31番地)

** 五大開発株式会社 技術本部 (〒921-8051 金沢市黒田1丁目35番地)

*** 博(工) 五大開発株式会社 技術本部 本部長 (〒921-8051 金沢市黒田1丁目35番地)

**** 正会員 Ph.D. 金沢大学大学院教授 自然科学研究科 (〒920-8667 金沢市小立野2丁目40番20号)

近年、都市部では土地の有効活用の理由により、既設構造物に隣接した地域において掘削工事が数多く行われている。その施工中の底盤の盤膨れや土留め壁の倒壊による事故、土留め壁の変形・移動による掘削空間の減少、周辺地盤への影響などにより設計変更を強いられる事象が問題となっており、安価で正確な土留め工の判断ツールが求められている。本論文では計算精度・安定性の向上として著者らが近年提案した陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土/水連成解析を、切梁支保工を含んだ土留め工解析へ応用し、土留め壁の新しい応力計算法の提案を行い、それらを組み込んだ設計者が使い易いユーザーインターフェイスを兼ね備えた設計支援ソフト開発を行った。

1. まえがき

近年、都市部では土地の有効活用の理由により、既設構造物に隣接した地域において掘削工事が数多く行われている。その施工中の底盤における盤膨れや土留め壁の倒壊による事故、土留め壁の変形・移動による掘削空間の減少、周辺地盤への影響などにより設計変更を強いられる事象が問題となっており、安価で正確な土留め工の判断ツールが求められている。従来、土留め工の設計において応力・変形の算出法として1)単純梁法、2)連続梁法(弾塑性法など)、3)FEMによる方法が挙げられる。単純梁法に代表される慣用計算法は、土留め壁を切梁と掘削底面以下に仮定する仮想支点で支えられる単純梁とみなし、その単純梁に見掛けの側圧を作用させて土留め壁の応力を求めている。また、掘削深の深い、規模の大きな土留めの場合には、根切り底面付近の地盤に塑性域を想定することにより、実状に近いモデル化を図った弾塑性法が適用されている。しかし、上記の方法によると構造体としては比較的単純でありモデル化しやすい反面、地盤の複雑さや施工の順序、掘削に伴う除荷、土圧の再配分、地下水の変動、あるいは時間の要素など計算上考慮しにくい要素も多々あり、FEMに基づく土留め工の解析はこの機構をかなり忠実に実行することができることから、従来より有望視されている。この弾塑性FEMを用いた方法が普及しない要因としては地盤情報の入力値の判断・取得方法の確立、計算時間の短縮、計算精度・安定性の向上、計算結果の判断手法の確立などが挙げられ、多く課題を残しているが、本論文では、計算

精度・安定性の向上として著者らが近年提案した陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土/水連成解析¹⁾を土留め工を対象とした弾塑性FEM解析へ応用し、土留め壁の新しい応力計算法の提案を行い、それらを組み込んだ設計者が使い易い、ユーザーインターフェイスを兼ね備えた設計支援ソフト開発を行った。

2. 陰解法弾塑性計算手法に基づいた土/水連成解析の定式化¹⁾

2.1 支配方程式と境界条件

地盤の変形挙動を考える際、地盤を土骨格(固体)と、その中に含まれている間隙水(液体)、気泡(気体)の混合物として考えるのが一般的かつ合理的な手法であろう²⁾。しかし、本論文の目的は土質力学で通常用いられている有効応力の原理に従う土/水連成数値解析の精度向上と計算時間の短縮にあるので、間隙は水で完全飽和であり、有効応力の原理を仮定する2相混合物として取り扱う。また、その間隙水は非圧縮性であると仮定する。

この単純化された2相混合物に対する準静的な場合の支配方程式は以下の6つの式で表される。

準静的なつりあい式：

$$\text{div} \mathbf{s} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

土骨格部分の弾塑性構成式：

$$\dot{\mathbf{s}}' = \mathbf{C}^{ep} \dot{\mathbf{e}}, \quad (2)$$

ひずみ変位関係式:

$$\mathbf{e} = (\nabla \mathbf{u})^S, \quad (3)$$

有効応力の原理:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}' - p_w \mathbf{1}, \quad (4)$$

連続式:

$$\text{tr}(\dot{\mathbf{e}}) + \text{div}(\mathbf{v}_w) = 0, \quad (5)$$

間隙水の流動則 (ダルシー則):

$$\mathbf{v}_w = -\mathbf{K}_p \text{grad}(h), \quad (6)$$

ここで \mathbf{s} は全応力テンソル, \mathbf{b} は物体力ベクトル, \mathbf{s}' は有効応力テンソル, \mathbf{C}^{ep} は弾塑性構成テンソル, p_w は間隙水圧, \mathbf{v}_w は間隙水の流速ベクトル (土骨格に対する相対速度), \mathbf{K}_p は透水係数テンソルであり, 各物理量の上の \cdot (ドット) は時間に関する微分, 上付きの s は () 内のテンソルの対称部分であることを表している. h は全水頭を表しており, \mathbf{g}_w を間隙水の単位体積重量, z を位置水頭とすると,

$$h = \frac{p_w}{\mathbf{g}_w} + z, \quad (7)$$

の関係がある. また土骨格部分 (正確には混合体全体), 間隙水圧 (全水頭) に対してそれぞれ境界条件が課されており, 土骨格に対する境界条件は

$$\text{Neumann 境界: } \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{s} \mathbf{n} \quad \text{on } S_s, \quad (8)$$

$$\text{Dirichlet 境界: } \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad \text{on } S_u, \quad (9)$$

である. ここで記号の上の $\bar{\cdot}$ (バー) は既知量であることを表しており, \mathbf{n} は S 上の単位法線ベクトルである. S_s は応力速度既知の境界, S_u は変位速度既知の境界であり, 土骨格部分に対する全境界を S とすると,

$$S \supset S_s, \quad S \supset S_u, \quad \mathbf{f} = S_s \cap S_u, \quad (10)$$

と仮定する. ここで \mathbf{f} は空集合であり, つまり上式は応力速度既知の境界と変位速度既知の境界が, それぞれ全境界に含まれ, かつ応力速度既知の境界と変位速度既知の境界の交わる部分が無いことを表している. 間隙水圧に対する境界条件は,

$$\text{Neumann 境界: } \bar{q} = \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } S_q, \quad (11)$$

$$\text{Dirichlet 境界: } \bar{h} = h \quad \text{on } S_h, \quad (12)$$

である. q は単位時間あたりの流出入量, S_q は流量既知の境界, S_h は水頭既知の境界である. 間隙水圧に対する全境界を S とすると,

$$S \supset S_q, \quad S \supset S_h, \quad \mathbf{f} = S_q \cap S_h, \quad (13)$$

と仮定する.

2.2 弱形式化と離散化

以下のような試験関数を定義する:

$$\mathbf{d} \mathbf{u} := \{\mathbf{d} \mathbf{u} \mid \mathbf{d} \mathbf{e} = (\nabla \mathbf{d} \mathbf{u})^S, \mathbf{d} \mathbf{u} = 0 \text{ on } S_u\}. \quad (14)$$

この試験関数をつりあい式 (1) に掛け合わせ Gauss の発散定理と土骨格部分の境界条件 (8), 有効応力の原理の式 (4) を用いると次式のつりあい式の弱形式が得られる:

$$\int_V (\mathbf{s}' - p_w \mathbf{1}) \cdot \mathbf{d} \mathbf{e} \, dv + \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \mathbf{u} \, dv - \int_{S_s} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{d} \mathbf{u} \, ds = 0. \quad (15)$$

次にもう一つ試験関数を定義する:

$$\mathbf{d} h := \{\mathbf{d} h \mid \mathbf{d} h = 0 \text{ on } S_h\}. \quad (16)$$

これを連続式 (5) に掛け合わせ Gauss の発散定理と流量既知の境界条件 (11) を用いることにより, 次のような連続式の弱形式が得られる:

$$\int_V \{\text{tr}(\dot{\mathbf{e}}) \mathbf{d} h - \mathbf{v}_w \cdot \text{grad}(\mathbf{d} h)\} \, dv = - \int_{S_q} \bar{q} \mathbf{d} h \, ds, \quad (17)$$

この2つの弱形式を有限要素法定式化するため空間的離散化を行う. 節点変位を \mathbf{d} , 節点水頭を \mathbf{h} とすると:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{d}, \\ \mathbf{e} &= \nabla \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d}, \\ \text{tr}(\dot{\mathbf{e}}) &= \mathbf{1}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{b}_v^T \dot{\mathbf{d}}, \\ h &= \mathbf{n}_h^T \mathbf{h}, \\ \text{grad}(h) &= \mathbf{B}_h \mathbf{h}, \\ \mathbf{v}_w &= -\mathbf{K}_p \mathbf{B}_h \mathbf{h}, \\ p_w &= \mathbf{g}_w (h - z), \\ &= \mathbf{g}_w \mathbf{n}_h^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (18)$$

ここで \mathbf{N} は変位に対する内挿関数であり, \mathbf{n} は間隙水圧に対する内挿関数である. 試験関数に対しても同様の離散化が行えると仮定すると:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{d} \mathbf{d}, \\ \mathbf{d} \mathbf{e} &= \mathbf{B} \mathbf{d} \mathbf{d}, \\ \mathbf{d} h &= \mathbf{n}_h^T \mathbf{d} \mathbf{h}, \\ \text{grad}(\mathbf{d} h) &= \mathbf{B}_h \mathbf{d} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (19)$$

となる. なおここで空間的離散化を行った (18) 式以降, 有限要素法定式化の慣例に従い, 変位, 応力やひずみなどの表記は変えていないが, 全てベクトル, ないし行列に変換されていることに注意する. したがって, 上付きの T は転置行列を意味する. (18), (19) の関係を (15), (17) に代入すると:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A} \left[\int_{V_e} \left\{ \mathbf{B}^T \mathbf{s}' - \mathbf{g}_w \mathbf{b}_v \mathbf{n}_h^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}) \right\} dv \right. \\ \left. + \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv - \int_{S_{qe}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} ds \right] = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \mathbf{h}^T \mathbf{A} \left[\int_{V_e} (\mathbf{n}_h \mathbf{b}_v^T \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{B}_h^T \mathbf{K}_p \mathbf{B}_h \mathbf{h}) dv + \int_{S_{qe}} \mathbf{n}_h \bar{q} ds \right] = 0, \\ \nabla \mathbf{d} \mathbf{d}, \nabla \mathbf{d} \mathbf{h} \end{aligned} \quad (21)$$

となり,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{s}'(\mathbf{d}) dv - \mathbf{g}_w \mathbf{K}_v^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}) \\ = \mathbf{A} \int_{S_{qe}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} ds - \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_h \mathbf{h} = - \mathbf{A} \int_{S_{qe}} \mathbf{n}_h \bar{q} ds, \quad (23)$$

が得られる。ここで

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{n}_h \mathbf{b}_v^T dv, \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}_h^T \mathbf{K}_p \mathbf{B}_h dv, \quad (25)$$

であり, \mathbf{A} は assembly operator と呼ばれ, 全要素数 ne の数だけ重ね合わせる事を意味する。式(22)と(23)の左辺を内力ベクトル, 右辺を外力ベクトルと呼び,

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{s}'(\mathbf{d}) dv - \mathbf{g}_w \mathbf{K}_v^T (\mathbf{h} - \mathbf{z}), \quad (26)$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{A} \int_{S_{qe}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} ds - \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv, \quad (27)$$

$$\mathbf{G}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{h}) = \mathbf{K}_v \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}_h \mathbf{h}, \quad (28)$$

$$\mathbf{G}^{\text{ext}} = - \mathbf{A} \int_{S_{qe}} \mathbf{n}_h \bar{q} ds, \quad (29)$$

と表すと, 最終的には土 / 水連成有限要素法定式化は節点における離散化された変位 \mathbf{d} , 変位速度 $\dot{\mathbf{d}}$ と間隙水圧 \mathbf{h} を未知とする非線形連立方程式に帰着される:

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\mathbf{G}^{\text{ext}} - \mathbf{G}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{h}) = \mathbf{0}. \quad (31)$$

式(30), (31)には速度型の物理量と, 現時の物理量が混在しているので時間に関して離散化(差分)を行う。

対象としている時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ において物理量 \mathbf{y} が線形に変化すると仮定すると,

$$\mathbf{y} = (1 - \mathbf{q}) \mathbf{y}_n + \mathbf{q} \mathbf{y}_{n+1}, \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n) / \mathbf{D}t, \quad (33)$$

と表せる。ここで, 下付き添え字 $n, n+1$ はそれぞれ時刻 t_n, t_{n+1} での物理量であることを表している。このパラメータ \mathbf{q} を 0 とした時を陽解法近似, 1 とした時を陰解法近似という。なお, 本論文の題名にもある陰解法弾塑性計算アルゴリズムとは, この \mathbf{q} を 1 としたことのみでないことに注意する。その大きな違いは土骨格部分の弾塑性体に対する応力計算法の違いにある。従来, 汎用されている土 / 水連成解析においては, この時間差分に関しては \mathbf{q} を 1 とし陰解法的に取り扱っているが, 弾塑性構成式に関しては, 単に陽解法増分解析を行っているものがほとんどであり, 求めた応力が降伏面上に正確に乗っていないなどの欠点があった¹⁾。この降伏面上にない応力を降伏面に戻す操作を Return Mapping と呼ぶが, Simo らは陰解法 Return Mapping として Algorithmic tangential moduli を用いた General return mapping algorithms を用いた弾塑性構成式を陰解法で解く方法を提案している³⁾。地盤材料においては Borja ら⁴⁾が修正 Cam-clay モデルを用いた陰解法弾塑性計算を提案している。しかし彼らは土骨格のみを対象とした解析であり, 間隙水については考慮していない。著者らは地盤材料の解析に汎用される土 / 水連成解析に, 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを整合するように組み込み, 2次収束が保証され, 理論解のある問題においては高精度であることを報告した¹⁾。

今, 時刻 t_n で式(30), (31)を満足しており, 時刻 t_{n+1} で満足する解を Newton Raphson 法に整合するよう求めることを考え, 式(30), (31)を Taylor 展開し, 節点変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}$, および, 節点水頭増分 $\Delta \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{h}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}$ に関する線形化近似を行う。ここで, 各物理量の下付き添え字 n は荷重ステップ数, 上付き添え字 (k) は各増分ステップ内のイタレーション回数を表している。 $\mathbf{q} = 1$ として式(32), (33)を式(30), (31)に用いると:

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} \Big|_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{h}_{n+1}^{(k+1)}) = \mathbf{0}, \quad (34)$$

$$\mathbf{G}^{\text{ext}} \Big|_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{G}^{\text{int}}(\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{(k+1)}, \mathbf{h}_{n+1}^{(k+1)}) = \mathbf{0}. \quad (35)$$

次に式(34)における内力ベクトルを $\mathbf{D} \mathbf{d}$ と $\mathbf{D} \mathbf{h}$ の一次の項まで Taylor 展開すると:

$$\mathbf{F}^{\text{int}} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{F}^{\text{int}} \Big|_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \mathbf{D} \mathbf{h}_{n+1}, \quad (36)$$

となる。上式, 右辺第2項および第3項は assembly operator \mathbf{A} が線形であることに注意すれば微分の chain rule を用いて以下ようになる,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{A} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{s}'(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{(k)}} \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} dv \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1}, \\ &= \mathbf{A} \left[\int_{V_e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{e \beta k} \mathbf{B} l v \right] \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1}, \\ &= \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \mathbf{D} \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{K}_v^T \mathbf{D} \mathbf{h}_{n+1}, \quad (38)$$

ここで式(37)中の $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)} = \left[\frac{\partial \mathbf{s}'(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)})}{\partial \mathbf{e}_{n+1}^{(k)}} \right]$ は, 式(30)を Newton

- Raphson 法で解く場合, それに整合した Consistent 弾塑性構成テンソルであり, 一次元の場合を除き, 一般には式(2)の (Continuum) 弾塑性構成テンソル \mathbf{C}^{ep} とは一致しない.

同様に式 (35) を Taylor 展開し, 微分の chain rule を用いれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k+1)} &\approx \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)} \\ &+ \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \mathbf{D} \mathbf{h}_{n+1}, \end{aligned} \quad (39)$$

となり, 既知な量と未知な量を分離し, マトリクス表示すると,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} & - \frac{\partial \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{h}_{n+1}^{(k)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{d}_{n+1} \\ \mathbf{D} \mathbf{h}_{n+1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)} - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1} \\ \mathbf{G}^{\text{int}}|_{n+1}^{(k)} - \mathbf{G}^{\text{ext}}|_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (40)$$

となる. 以上から式(40)は離散化された \mathbf{d} と \mathbf{h} の非線形連立方程式, 式 (34) と式 (35) を解く Newton Raphson 法に整合していることが分かる.

2.3 Consistent 弾塑性構成テンソル

粘性土の挙動をよく表す構成式として, 汎用される Cam-clay モデルの降伏関数は以下のように与えられる:

$$f(p, q, p_c) = q + \mathbf{M} p \ln\left(\frac{p}{p_c}\right) = 0, \quad (41)$$

ここで平均応力 $p = -tr(\mathbf{s}')/3$ であり, 一般化偏差応力 $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{S}\|$, 偏差応力 $\mathbf{S} = \mathbf{s}' - tr(\mathbf{s}')\mathbf{1}/3$ である. 応力の右上のダッシュは有効応力であることを表している. 応力, ひずみ等は引張りを正, 平均応力, 体積ひずみ等は土質力学の慣例に従い圧縮を正としている. \mathbf{M} は限界応力比,

p_c は先行圧密応力である.

この Cam-clay モデルに対する全体の非線形連立方程式に整合する Consistent 弾塑性構成テンソルは以下のように誘導できる (詳しい誘導は文献 1) 参照):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)} &= 2\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x}\mathbf{I} - (a_1 + a_2 b_1 + \frac{2}{3}\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x})(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \\ &\quad - a_2 b_2 (\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}}) \\ &\quad - \sqrt{6}\tilde{\mathbf{G}} b_1 (\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1}) \\ &\quad + \tilde{\mathbf{G}}(2 - \sqrt{6}b_2 - 2\mathbf{x})(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}), \end{aligned} \quad (42)$$

ここで上式の各係数 a, b は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} a_1 &= -\tilde{\mathbf{K}}p(D + \mathbf{D}\mathbf{f})/a, \\ a_2 &= -\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{M}Dp[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]/a, \\ a_3 &= -\tilde{\mathbf{K}}p_c \mathbf{D}\mathbf{f}/a, \\ a_4 &= p_c p [1 + \ln(\frac{p}{p_c})]/a, \\ a &= Dp + \mathbf{D}\mathbf{f}(p + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{M}D), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \mathbf{M}\{a_3 \frac{p}{p_c} - a_1[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]\}/b, \\ b_2 &= -\sqrt{6}\tilde{\mathbf{G}}/b, \\ b &= -\mathbf{M}\{a_4 \frac{p}{p_c} - a_2[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]\} - 3\tilde{\mathbf{G}}, \end{aligned} \quad (44)$$

ここで D はダイレイタンス係数であり, \mathbf{I} を圧縮指数, k を膨潤指数, e を間隙比とすると

$$D = \frac{\mathbf{I} - k}{\mathbf{M}(1 + e)}, \quad (45)$$

で与えられる. また, 係数 $\tilde{\mathbf{K}} = (1 + e)p/k$, $\tilde{\mathbf{G}} = 3\tilde{\mathbf{K}}(1 - 2n)/2(1 + n)$ であり, n はポアソン比, $\mathbf{x} = \sqrt{\frac{2}{3}}q/\|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\| = \|\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}\|/\|\mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}}\|$ である. 式 (42) の Consistent 弾塑性構成テンソルは, 式 (34), (35) を Newton - Raphson 法を行って解く場合に整合したものであり, したがって 2 次収束を保証している. ここで $\Delta f \rightarrow 0$ とすると $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)}$ は式(2)の (Continuum) 弾塑性構成テンソル \mathbf{C}^{ep} に一致する.

2.4 弾塑性判定

時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ の増分弾塑性初期値境界値問題を考え, 時刻 t_n の時の $\{e_n, s'_n, (p_c)_n\}$ が既知であると仮定する. 今, 与えられた $e_{n+1}^{(k)}$ に対して試行弾性状態は次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}e_{n+1}^{(k)} &:= e_{n+1}^{(k)} - e_n, \\ \mathbf{S}_{n+1}^{\text{trial}} &:= s'_n + \mathbf{C}\mathbf{D}e_{n+1}^{(k)}, \\ (p_c)_{n+1}^{\text{trial}} &:= (p_c)_n, \end{aligned} \quad (46)$$

ここで \mathbf{C} は弾性構成マトリクスである。上式より試行平均応力，試行一般化偏差応力，試行偏差応力は，

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{trial} &= -\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}), \\ q_{n+1}^{trial} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\|, \\ \mathbf{S}_{n+1}^{trial} &= \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{S}_{n+1}^{trial}) \mathbf{I}, \end{aligned} \quad (47)$$

と表される。

負荷除荷判定は，離散化 Kuhn-Tucker 条件により，

$$f_{n+1}^{trial} \begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{elastic step } \mathbf{Df} = 0, \\ > 0 \Rightarrow \text{plastic step } \mathbf{Df} > 0, \end{cases} \quad (48)$$

で行われ，ここで，

$$f_{n+1}^{trial} = q_{n+1}^{trial} + M p_{n+1}^{trial} \ln\left(\frac{p_{n+1}^{trial}}{(p_c)_n}\right) = 0, \quad (49)$$

である。

3. 計算結果の表示

3.1 局所安全率

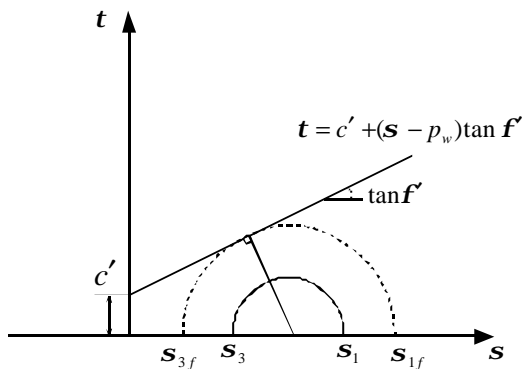


図 - 1 Mohr 円を用いた局所安全率

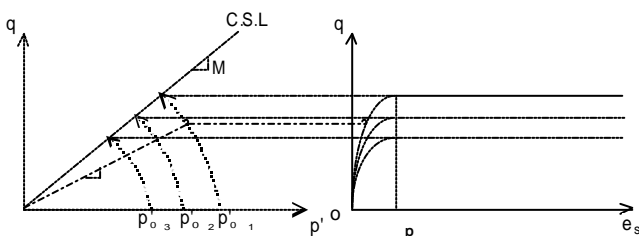


図 - 2 Cam Clay モデルにおける非排水パスと応力ひずみ関係

実際に地盤が破壊する際には，すべり面が表れる場合が多く観測されるが，すべり面全体で同時に破壊することは少なく，ある時点で発生した局所的な降伏あるいは破壊が順次拡大し，ついには全体の崩壊に至るといった経過をた

どることは明らかである。このような破壊が徐々に進行して行く様相を進行性破壊と呼ぶ。この進行性破壊を取り扱う有用な方法としては有限要素法などの数値解析の手法が用いられている。また，この1つの地盤内土要素の破壊状態を表す指標として局所安全率がある。

局所安全率はこれまで岩盤斜面の切土安定評価の際に，有限要素法を用いた解析の例⁵⁾があるが，その報告では図 - 1 のようにモールクーロン破壊規準を用いて，主応力より，

$$\begin{aligned} SC &= \frac{s_{1f} - s_{3f}}{s_1 - s_3}, \\ &= \frac{(s_1 + s_3 - 2p_w) \sin f' + 2c' \cdot \cos f'}{s_1 - s_3}, \end{aligned} \quad (50)$$

を計算し，この $SC = 1.0$ であれば安定性は保たれているが， $SC < 1.0$ の場合には土要素は破壊する（安全性は保たれない）と反定されている。したがって式 (50) を用いて各要素の SC を計算し，その分布を調べれば地盤内の破壊領域が分かり，安全性の評価ができる。

一方，本論文で対象とする Cam Clay モデルに対する局所安全率は筆者らの知る限り見当たらないので，限界応力比を用いて以下のように定義する，

$$a := \frac{M}{h}, \quad (51)$$

ここで $h (= q/p')$ は応力比と呼び，図 - 2 のように $p'-q$ 空間内での傾きを表す。すなわち，局所安全率 a はその点で非排水変形させた場合の限界状態線 (Critical State Line, C.S.L) の傾きと，現在の $p'-q$ 関係の傾きの比となる。なお，各点で非排水状態の場合，せん断が進行すると限界状態線上で止まり， $a = 1.0$ となるが，この論文の以降の解析においては，各点で排水状態，すなわち間隙水が自由に移動できる状態としているので，限界状態線を越えて吸水軟化することもあり，その時は $a < 1.0$ となることもあり得る。

3.2 土留め壁の曲げモーメント，せん断力表示

従来，土留め壁を有限要素法に組み込む場合，主に梁理論による有限要素解析が用いられてきた。梁要素は梁理論に基づいて定式化されており，地盤の要素の節点に面積ゼロの線要素を重ねれば良く，簡便さから要素数の増大を招かないなどの理由により汎用されてきたと考えられる。しかし，通常用いられる梁要素であると，変位を表す形状関数に回転角を含み，土の部分の平面要素と

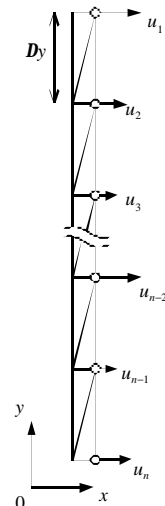


図 - 3 土留め壁の要素

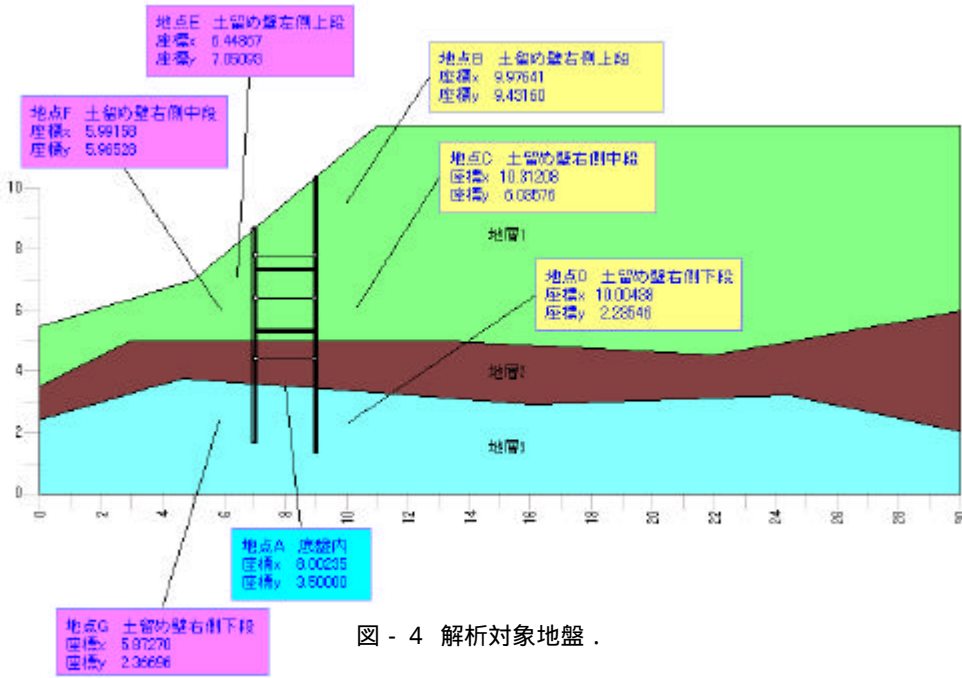


図 - 4 解析対象地盤 .

梁要素で変位が適合しない (変位のくい違いが生じる) などの問題があった。近年, 計算機の高速度とメモリ容量の画期的な増大に伴い, 要素の増大はそれほど問題となくなってきたことより, 土留め壁を平面要素で近似することを考えた。その際, 土留め壁の安定照査の為, 曲げモーメント, せん断力を求める必要があるが, 本論文では有限要素法においてもっとも精度の良い, 節点変位を用いて梁の微分方程式に差分法を適用し, 曲げモーメントやせん断力を求める一つの新しい方法を考案した。

梁の x 方向変位を u とすると, 曲げモーメント M は

$$EI u'' = -M, \quad (61)$$

せん断力 Q は

$$EI u''' = -Q, \quad (62)$$

と表される。この x 方向変位 u の2階微分, 3階微分を数値微分で求める。2階微分の中心差分表現は $O(Dy^2)$ (Dy の2乗の打切り誤差のオーダーを持つ) に対して

$$u''|_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(Dy)^2}, \quad (63)$$

で表される。また土留め壁の端においては $O(Dy^2)$ の前進差分, 後退差分表現を用いる:

$$u''|_i = \frac{2u_i - 5u_{i+1} + 4u_{i+2} - u_{i+3}}{(Dy)^2} \quad (i=1 \text{ の場合}), \quad (64)$$

$$u''|_i = \frac{-u_{i-3} + 4u_{i-2} - 5u_{i-1} + 2u_i}{(Dy)^2} \quad (i=n \text{ の場合}). \quad (65)$$

また, 3階微分に対しても同様に, 次式を用いる:

$$u''|_i = \frac{-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2(Dy)^3}, \quad (66)$$

$$u''|_i = \frac{-5u_i + 18u_{i+1} - 24u_{i+2} + 14u_{i+3} - 3u_{i+4}}{2(Dy)^3} \quad (i=1,2 \text{ の場合}), \quad (67)$$

$$u''|_i = \frac{3u_{i-4} - 14u_{i-3} + 24u_{i-2} - 18u_{i-1} + 5u_i}{2(Dy)^3} \quad (i=n, n-1 \text{ の場合}), \quad (68)$$

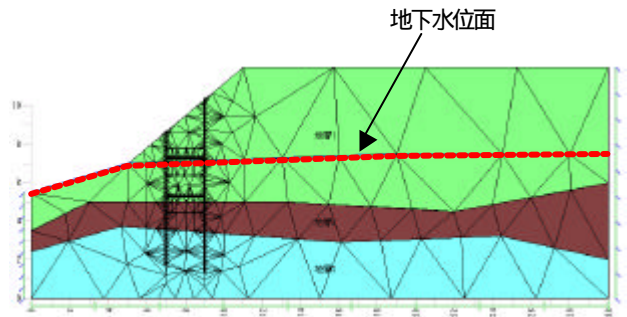


図 - 5 要素分割図

4. 根切り工事に伴う土留め工の有限要素法解析

4.1 解析対象地盤

解析対象は, 図 - 4 に示すような斜面を有する地盤を考えた。地層は3層とし, 各層の土質定数としては表 - 1 に示した値を用いた。土骨格部分の境界条件としては, 左右端境界は水平固定, 垂直自由であり, 下端境界は水平垂直固定とした。間隙水圧境界条件としては左右端境界が排水条件, 下端境界が非排水条件とし

陰解法弾塑性計算土 / 水連成有限要素法を用いた土留め工の解析

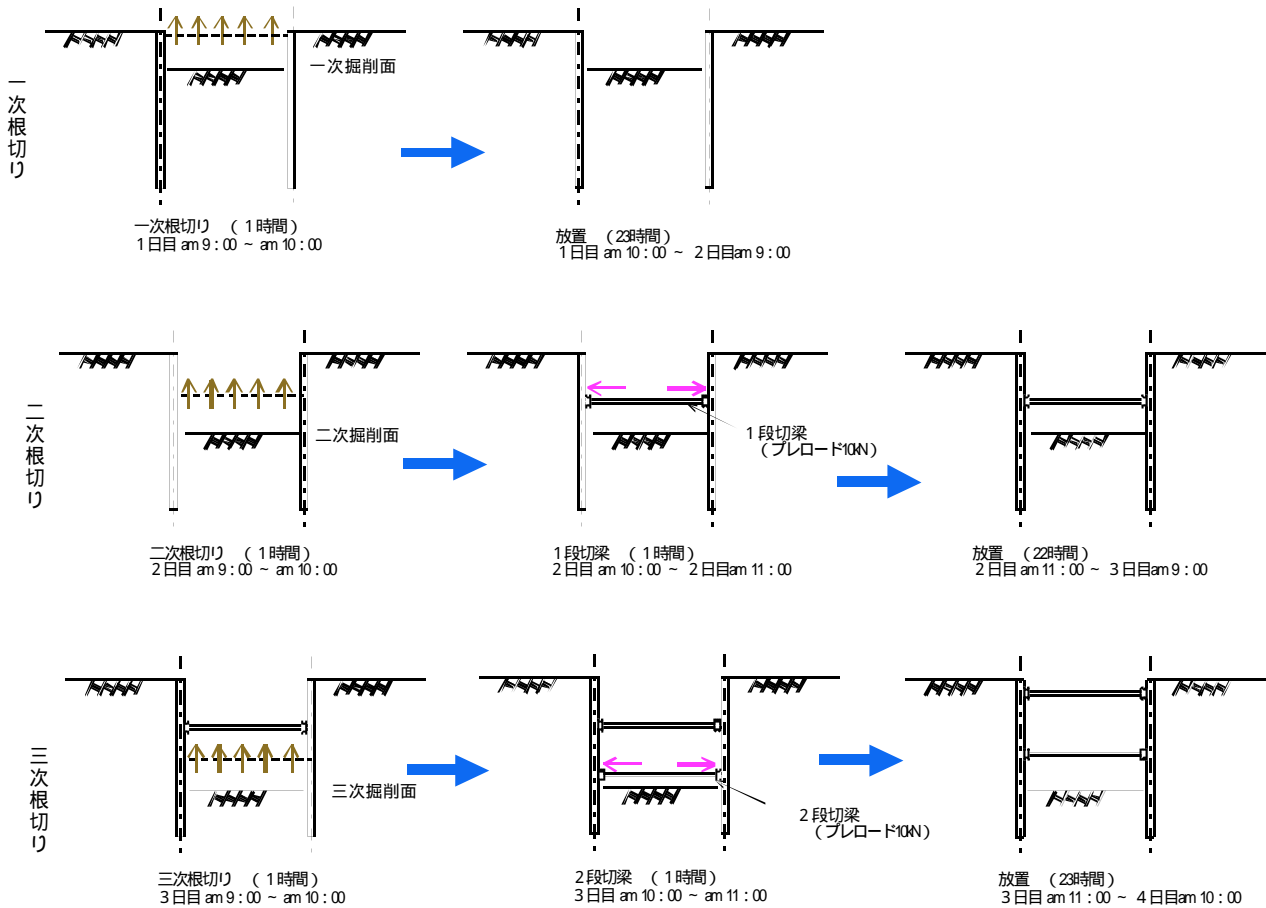


図 - 6 施工工程模式図

た．有限要素は三角形6 節点アイソパラメトリック要素を用いており，要素数は 799 ，節点数は 1649 であり，その要素分割図を図 - 5 に示す．図中，点線で示した線が地下水位面であり，その線を間隙水圧ゼロとし，その線より深い部分は静水圧分布とした．解析は 1step ごとに式(40)の右辺で定義される残差力ベクトルのノルムの2 乗和が許容誤差以下となるまでイタレーションを繰返し，許容誤差以下となったところで値を保存し，次のステップに進む繰返し計算を行った．また，許容誤差は 1.0×10^{-5} とした．

4.2 施工工程

土留め工の施工工程は図 - 6 のように施工開始日時，施工間隔，施工種別を設定した．1 日目一次根切りを行い，2 日目二次，3 日目三次根切りを行った．また，二次根切りと三根切りのそれぞれ直後に，10kN のプレロードを加えながら，支保工として切梁を施工した．

表 - 1 本解析に用いた土質定数

地層名	地層 1	地層 2	地層 3
圧縮指数 I	1.5	0.42	1.0
膨潤指数 k	0.01	0.072	0.01
ポアソン比 n	0.3	0.3	0.3
初期間隙比 e_0	1.0	2.23	1.0
限界応力比 M	1.4	1.65	1.4
透水係数 k [cm/s]	3.7×10^{-5}	3.7×10^{-5}	3.7×10^{-3}

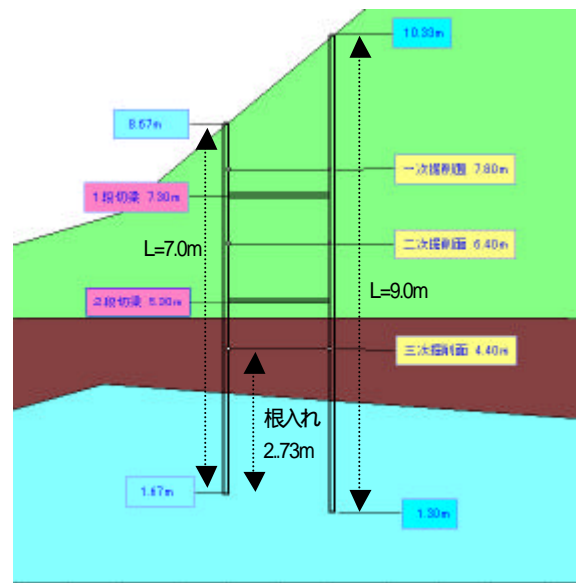


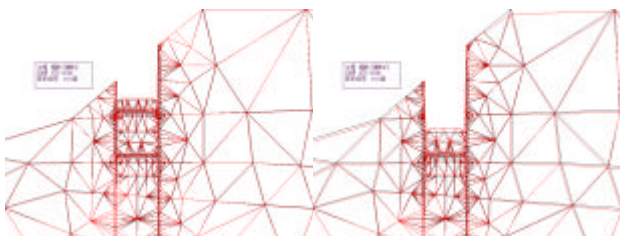
図 - 7 土留め工概要図

なお本解析に用いている有限要素法は, 全応力解析で用いられている時間無依存な弾塑性解析と違い, 有効応力を用いた土/水連成解析であるため, 時間に依存した解析となり, 上記の施工工程が忠実に反映されるのみならず, 放置という間隙水圧が定常となるまでのクリープ変形の効果も検討可能となる。

4.3 土留め工概要

土留め工の概要図を図 - 7 に示す。掘削工事は斜面内に行われるとし, 2次元断面内では非対称な地盤で検討するものとする。斜面上部側の土留め壁は L=9.0m, 下部側は L=7.0m とする。掘削は3段階に分けて行うが, 一次掘削面は, 支持基盤より高さ 7.80m, 二次掘削面は高さ 6.40m, 三次掘削面は高さ 4.40m とする。すなわち根入れ長は下部側で 2.73m となる。また, 切梁支保工は2段階で行うものとし, 1段切梁は支持基盤より高さ 7.30m, 2段切梁は 5.30m とする。

4.4 最終時刻における各物理量の分布図



(a) 1 日目 am10:00 : 一次根切り終了時
(b) 2 日目 am10:00 : 二次根切り終了時

(c) 2 日目 am11:00 : 1 段目切梁設置時
(d) 3 日目 am10:00 : 三次根切り終了時

(e) 3 日目 am11:00 : 2 段目切梁設置時
(f) 4 日目 am10:00 : 最終変形状態

図 - 8 変形図

図 - 8 に最終状態 (4 日目 am10:00) の変形図を示す。根切り底において隆起が起こっており, 盤膨れの様子が観察できる。また同時刻の局所安全率の分布図が図 - 9, 間隙水圧の分布が図 - 10 である。根入れが十分されており,

切梁支保工も効果が発揮されているため, 土留め周辺地盤への影響は少なく, 局所安全率が 1.0 以下となっているのは底盤内だけであることが分かる。

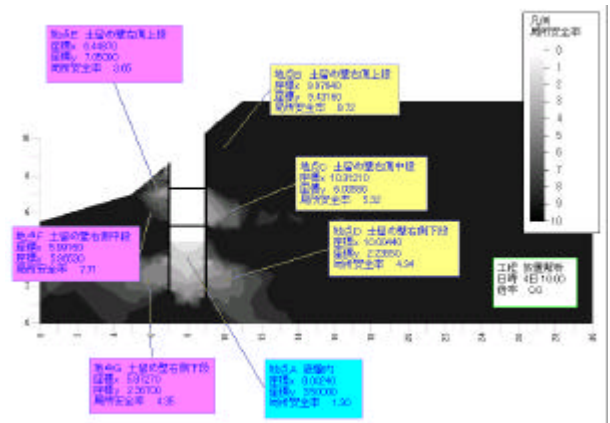


図 - 9 局所安全率分布図 : 4 日目 am10:00

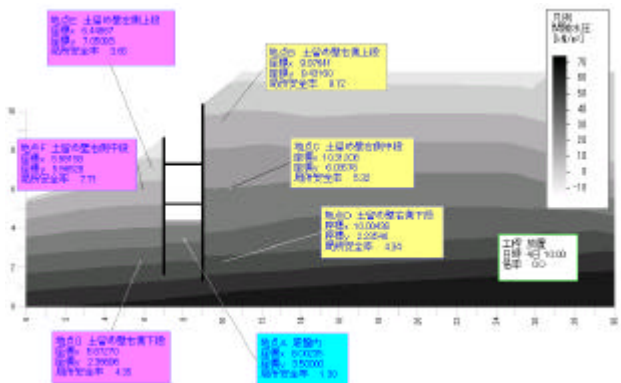


図 - 10 間隙水圧分布図 : 4 日目 am10:00

4.5 各物理量の時系列変化 陽解法弾塑性計算と陰解法弾塑性計算の比較

各物理量の時系列変化の様子は, 図 - 4 内の地点 A ~ G の計 7箇所を対象とした。地点 A は底盤内の点であり, 地点 B, C, D は土留め壁より斜面上部側で, 上段, 中段, 下段の点であり, E, F, G は斜面下部側の上段, 中段, 下段の点である。

図 - 11 は底盤内 A 点での局所安全率の時系列変化図であり, 全 8 工程 (図 - 6 参照) の各工程を 10step, 100step, 1000step で計算したものである。また, 図 - 12 は同様の計算を従来から用いられている陽解法弾塑性計算 (連続式(23)の時間離散化に関しては, 式(32)の を 1 とした陰解法)を用いて計算したものである。陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土/水連成解析では, ステップ数の多少にかかわらず,

表 - 2 各解析種別による計算時間の比較

解析種別	計算時間 [min]	計算時間 [hour]
陽解法[各工程 10step]	18	0.30
陽解法[各工程 100step]	179	2.98
陽解法[各工程 1000step]	1,718	28.63
陰解法[各工程 10step]	261	4.35
陰解法[各工程 100step]	1,533	25.55
陰解法[各工程 1000step]	12,181	203.02

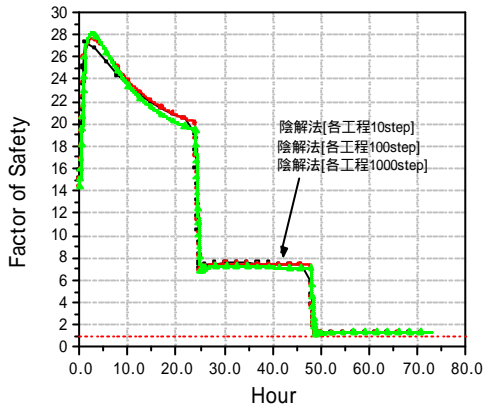


図 - 11 地点 A 底盤内の局所安全率の時間変化 陰解法弾塑性計算アルゴリズムによる結果 .

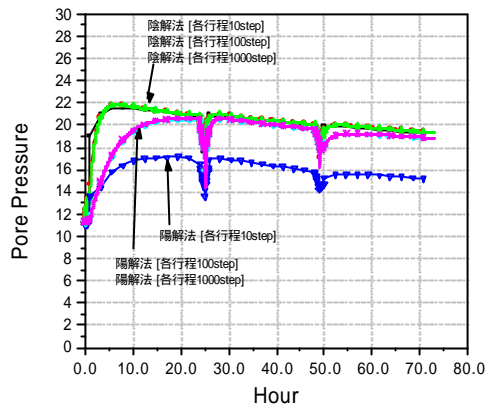


図 - 14 地点 C (斜面上部側中段) の間隙水圧の時間変化 : 陰解法と陽解法の比較 .

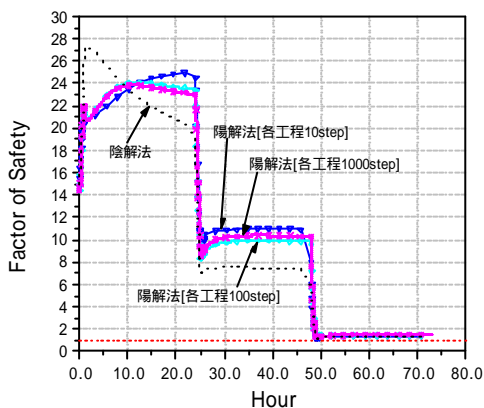


図 - 12 地点 A (底盤内) の局所安全率の時間変化 陽解法弾塑性計算アルゴリズムによる結果 .

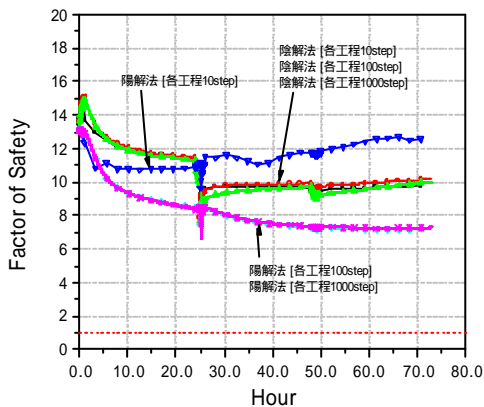


図 - 13 地点 B (斜面上部側上段) の局所安全率の時間変化 陰解法と陽解法の比較 .

(残差カナルム, したがって, つりあい式, 連続式を高精度で満足している) 精度の良い解が得られている事が明らかに分かる .

これは有限要素法における全体剛性方程式である非線形連立一次方程式を Newton Raphson 法に整合させ, 残差

を効率良く収束させていることと, 陰解法弾塑性計算に基づく, 陰解法リターンマッピングを用いて必ず, 降伏曲面上に乗る応力を求めているからである .

表 - 2 は各解析種別ごとの実際に計算にかかった時間を示した表である . これは当研究室にあるパソコン (CPU : Pentium4, 2.2GHz, memory : 512MB, OS : Windows2000) で行ったものである . 図 - 12 より明らかなように 陽解法による解は, ステップ数を多くとる程, 精度の良い陰解法の解に近づいてゆく . しかしながら, 1000step としても, 陰解法の 10step (ないし, 100, 1000step) の解とは, 未だかなり異なった値のままである . 結局,

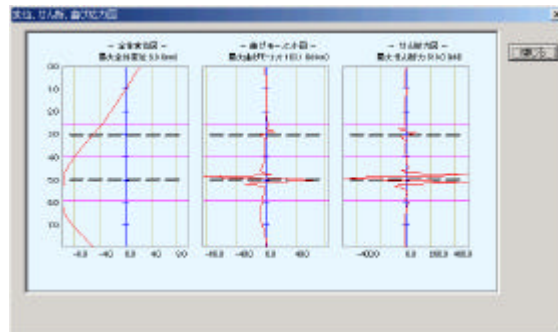


図 - 15 最終状態の土留め壁の変位, 曲げモーメント, せん断力図 土留め壁の長さL=8m .

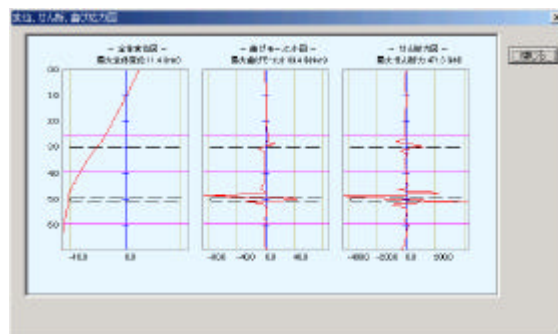


図 - 16 最終状態の土留め壁の変位, 曲げモーメント, せん断力図 土留め壁の長さL=9m .

陽解法で精度の良い解を得ようとする、非常に多くのステップ数を取らねばならず、計算時間が相当長くなる事になる。

図 - 13 は地点 D における局所安全率の時間変化で、陽解法と陰解法を比較したものである。この地点においても同様に陰解法であるとステップ数が変化しても値に変化はないが、陽解法であると値が大きくばらついていることが分かる。また、陽解法の方を用いた時、ステップ数が少ないと安全率を大きく見積り、安全性の判定には危険側になる。

図 - 14 は地点 C における間隙水圧の時間変化であるが、図 - 12 の結果と同様に、陽解法の結果はステップ数を細かくするほど陰解法の結果に近づいている。

紙面の都合上、省略するが、この論文で示した他のどの地点においても陰解法の結果はステップ数に寄らない、精度の良い結果が得られることが確認できた。

4.6 土留め壁の検討

図 - 15, 図 - 16 は最終状態における土留め壁の変位、曲げモーメント、せん断力を示したものである。図 - 15 は土留め壁の長さ $L=8\text{m}$ 、図 - 16 は土留め壁の長さ $L=9\text{m}$ とした時の結果である。土留め壁を短くし、根入れを少なくすると最大変位は小さくなるが、曲げモーメント、せん断力共に大きくなり、危険となることが示されている。ちなみに土留め壁の長さ $L=8\text{m}$ の時は最大変位 9.8 mm 、最大曲げモーメント $103.1\text{ kN}\cdot\text{m}$ 、最大せん断力 618 kN であったものが、 $L=9\text{m}$ の時は最大変位 11.4 mm 、最大曲げモーメント $89.4\text{ kN}\cdot\text{m}$ 、最大せん断力 471.3 kN となった。

5. 結論

著者らが近年提案した陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土/水連成解析を、土留め工を対象とした解析に応用した。前報告においては 1 要素の理論解のある問題において検

証した結果、従来の陽解法弾塑性計算に比べて、非常に高精度であることや、多要素の場合、2 次収束が保証され、安定的に解を求めることができることを報告したが、本報告においては、地盤の自重を考慮し、また土留め壁、切梁といった構造物が連成する、実務で使われているような一般的な問題に適用した結果、解析者の主観により変化する、解析ステップ数に依存しない解析結果が得られる有用性を明らかにした。

6. 謝辞

本報告に用いた研究成果は、平成 13 年度石川県産業技術等研究開発補助金の援助を得て行ったものである。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 矢富盟祥, 鱸 洋一: 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析, 『応用力学論文集』, Vol.4, pp.345-356, 2001.
- 2) 矢富盟祥: 海底地盤の力学挙動, 海岸波動, 第 編, 第 2 章, pp.457-459, 土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会, 1994.
- 3) 例えば J. C. Simo, T.J.R.Hughes: Computational Inelasticity, Springer-Verlag New York, 1998.
- 4) R. I. Borja and S. R. Lee: Cam-Clay plasticity, Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg. 78(1), pp.49-72, 1990.
- 5) 地盤工学における数値解析の実務, 社団法人 土質工学会, pp.32 - 37, 1987.

(2002.7.1 受付)